

Simulation du comportement thermique d'un local par la méthode des fonctions de Green

Djilali Khaine, Jean-Yves Desmons*, Aïcha Khaine, Rached Ben Younes, Michel Le Ray

Laboratoire de mécanique et d'énergétique, université de Valenciennes, BP 311, 59304 Valenciennes cedex, France

(Reçu le 12 mars 1998, accepté le 3 décembre 1998)

Abridged English version at the end of the text

Abstract — Simulation of the thermal behavior of a room by the Green's function method. The study of the thermal behavior of a building, submitted to variable atmospheric conditions, demands a study of the heat transfer phenomena in the nonstationary regime. The aim of this study is to evaluate as finely as possible the response of the room in the dynamic regime to indicial and harmonic solicitations of the external temperatures. We have thus elaborated a mathematical model based on the Green's function theory for the evidencing of the thermal inertia of the room from the resolution of the equation of heat propagation in the wall and the equation of thermal equilibrium for the internal air of the room. © Elsevier, Paris.

modélisation / Green's functions / thermal inertia / thermal mass / heat propagation / products of convolution

Résumé — L'étude du comportement thermique d'un bâtiment soumis à des conditions atmosphériques variables exige une étude des phénomènes de transfert de chaleur en régime instationnaire. L'objectif fixé est d'évaluer aussi finement que possible les réponses du local en régime dynamique à des sollicitations indicielles et harmoniques des températures extérieures. Nous avons alors élaboré un modèle mathématique basé sur la théorie des fonctions de Green pour la mise en évidence de l'inertie thermique du local à partir de la résolution de l'équation de propagation de la chaleur dans le mur et de l'équation du bilan thermique de l'air intérieur du local. © Elsevier, Paris.

fonctions de Green / inertie thermique / modélisation / masse thermique / propagation de la chaleur / produits de convolution

Nomenclature

c	capacité thermique.....	$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
H	coefficient global d'échange.....	$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
ℓ	épaisseur de la paroi.....	m
S_ℓ	surface des parois latérales.....	m^2
S_t	surface du toit.....	m^2
$T(x,t)$	champ de température dans les parois solides.....	K
$T_0(x)$	champ de température à l'instant $t = 0$	K
$T(\ell,t)$	température des surfaces intérieures des parois.....	K
$T(0,t)$	température des surfaces extérieures des parois.....	K
$T_e^0(t)$	sollicitation de température extérieure selon un échelon unité.....	K

$T_e(t)$	sollicitation sinusoïdale de température extérieure.....	K
$T_a^0(t)$	température de l'air du local échelon unité (méthode des fonctions de Green).....	K
$T_{am}^0(t)$	température de l'air du local échelon unité (modèle de la masse thermique).....	K
$T_{as}^0(t)$	température de l'air du local échelon unité (méthode de la résistance thermique pure).....	K
$T_a(t)$	température de l'air du local sinusoïdale (méthode des fonctions de Green).....	K
$T_{am}(t)$	température de l'air du local sinusoïdale (modèle de la masse thermique).....	K
$T_{as}(t)$	température de l'air du local sinusoïdale (méthode de la résistance thermique pure).....	K
V	volume du local.....	m^3

* Correspondance et tirés à part.

Cet article fait suite à une communication présentée par les auteurs aux 8^{es} JITH, qui se sont tenues à Marseille du 7 au 10 juillet 1997.

Symboles grecs

ρ	masse volumique	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
λ	conductivité thermique	$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
μ	inverse de la constante de temps de la fonction $H(t)$	s^{-1}
σ	inverse de la constante de temps de la fonction $K(t)$	s^{-1}

Indices

a	air
i	interne
e	externe
ℓ	parois verticales
t	toit
b	béton

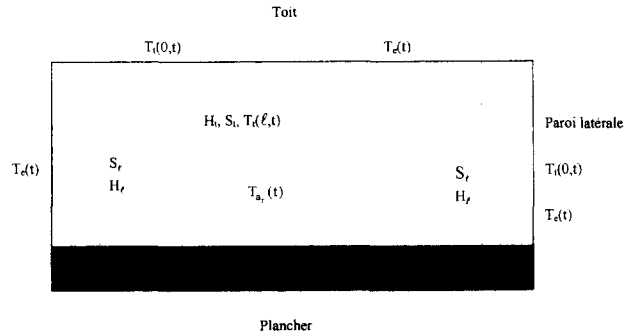


Figure 1. Schéma du local.

Figure 1. Diagram of the room.

1. INTRODUCTION

Les méthodes de type différences finies, éléments finis, nodales ou modales, utilisées dans l'étude du comportement thermique des bâtiments [1-7], sont basées sur la discrétisation spatiale des éléments constituants (parois). Ces méthodes, qui permettent de tenir compte de l'inertie de l'enveloppe, ne fournissent des résultats corrects que si la discrétisation est très fine, ce qui entraîne un allongement du temps de calcul. Nous proposons ici une méthode analytique basée sur la théorie des fonctions de Green, qui permet de s'affranchir de ces problèmes.

Un bâtiment est soumis à trois types d'excitations : la température extérieure, le rayonnement solaire et le flux de chaleur provenant d'un système de chauffage. Nous n'étudierons ici que le comportement thermique d'un local simple, soumis à des variations de la température extérieure selon un échelon unité et sinusoïdales.

2. DESCRIPTION DU MODÈLE PROPOSÉ

Le modèle proposé s'applique à une cellule d'habitation (figure 1) comprenant les éléments suivants :

- les parois de la cellule, de forme cubique, sont constituées d'une structure lourde assimilée à un matériau homogène de surface S , d'épaisseur ℓ , de conductivité thermique λ , de capacité calorifique volumique $\rho_b c_b$ et de diffusivité a . Les transferts de chaleur superficiels par convection ou rayonnement vers l'extérieur ou l'intérieur sont caractérisés par des coefficients globaux de transfert H_{et} , H_{it} pour le toit et H_{el} , H_{il} pour les quatre parois latérales. Le champ de température dans chaque paroi désigné par $T(x,t)$ est supposé unidirectionnel, et les plaques constituant l'enveloppe sont supposées sans interactions entre elles ;
- l'air du local, de volume V_a , supposé à température uniforme, est de capacité thermique volumique $\rho_a c_a$;

- le plancher est complètement isolé ;
- le renouvellement d'air est supposé négligeable.

Dans ces conditions, on a à résoudre dans chacune des parois l'équation de la chaleur couplée à l'équation d'évolution de la température de l'air intérieur du local.

3. ÉQUATIONS DU PROBLÈME

3.1. Bilan énergétique de l'air du local

L'équation d'évolution de l'air du local, en contact avec les parois intérieures, s'écrit :

$$\rho_a c_a V_a \frac{dT_a(t)}{dt} = H_{it} S_\ell [T_\ell(\ell,t) - T_a(t)] + H_{it} S_t [T_t(\ell,t) - T_a(t)] \quad (1)$$

soit en posant :

$$\theta_\ell = \frac{H_{it} S_\ell}{\rho_a c_a V_a} \quad \theta_t = \frac{H_{it} S_t}{\rho_a c_a V_a}$$

L'équation (1) s'écrit :

$$\frac{dT_a(t)}{dt} = \theta_\ell [T_\ell(\ell,t) - T_a(t)] + \theta_t [T_t(\ell,t) - T_a(t)] \quad (2)$$

Sa transformée de Laplace est :

$$p \bar{T}_a(p) = T_a(0) + \theta_\ell [\bar{T}_\ell(\ell,p) - \bar{T}_a(p)] + \theta_t [\bar{T}_t(\ell,p) - \bar{T}_a(p)] \quad (3)$$

3.2. Équation de propagation de la chaleur dans les parois

L'équation de propagation de la chaleur dans une paroi s'écrit :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad (4)$$

avec comme conditions aux limites :

– pour le toit :

$$\begin{cases} \lambda \left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = H_{et} (T_t(0,t) - T_e(t)) \\ \lambda \left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=\ell} = H_{it} (T_a(t) - T_t(\ell,t)) \end{cases} \quad (5)$$

– pour les parois latérales :

$$\begin{cases} \lambda \left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = H_{el} (T_\ell(0,t) - T_e(t)) \\ \lambda \left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=\ell} = H_{il} (T_a(t) - T_\ell(\ell,t)) \end{cases} \quad (6)$$

3.3. Résolution du système d'équations

Pour résoudre analytiquement l'équation de propagation de la chaleur dans une plaque, par exemple pour le toit, définissons la fonction $G_t(x,x',t)$ comme solution du système suivant :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial G_t}{\partial t}(x,x',t) - \frac{\partial^2 G_t}{\partial x^2}(x,x',t) = \delta(x-x')\delta(t) \quad (7)$$

avec $G_t(x,x',t) = 0$ si $t < 0$

et comme conditions aux limites :

$$\begin{cases} \lambda \left. \frac{\partial G_t(x,x',t)}{\partial x} \right|_{x=0} = H_{et} G_t(x,x',t) \Big|_{x=0} \\ \lambda \left. \frac{\partial G_t(x,x',t)}{\partial x} \right|_{x=\ell} = -H_{it} G_t(x,x',t) \Big|_{x=\ell} \end{cases} \quad (8)$$

Prenons les transformées de Laplace des équations (4) et (7) :

$$\begin{cases} \frac{P}{a} \bar{T} - \frac{1}{a} T_0(x) = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} \\ \frac{P}{a} \bar{G}_t - \frac{\partial^2 \bar{G}_t}{\partial x^2} = \delta(x-x') \end{cases} \quad (9)$$

($T_0(x)$ étant le champ de température initiale dans une paroi).

Multiplions la première équation par \bar{G}_t et la seconde par \bar{T} ; le système (9) devient :

$$\begin{cases} \frac{P}{a} \bar{T} \bar{G}_t = \frac{1}{a} T_0(x) \bar{G}_t + \bar{G}_t \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} \\ \frac{P}{a} \bar{G}_t \bar{T} = \bar{T} \frac{\partial^2 \bar{G}_t}{\partial x^2} + \bar{T} \delta(x-x') \end{cases} \quad (10)$$

Nous obtenons après soustraction des deux équations :

$$\frac{1}{a} T_0(x) \bar{G}_t + \bar{G}_t \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \bar{T} \frac{\partial^2 \bar{G}_t}{\partial x^2} + \bar{T} \delta(x-x') \quad (11)$$

soit :

$$\frac{1}{a} T_0(x) \bar{G}_t + \left(\bar{G}_t \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} - \bar{T} \frac{\partial^2 \bar{G}_t}{\partial x^2} \right) = \bar{T} \delta(x-x') \quad (12)$$

En intégrant les deux membres de l'égalité dans l'intervalle $[0,\ell]$, on obtient :

$$\int_0^\ell \bar{T}(x,p) \delta(x-x') dx = \int_0^\ell \frac{\bar{G}_t(x,x',p)}{a} T_0(x) dx + \int_0^\ell \left(\bar{G}_t \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} - \bar{T} \frac{\partial^2 \bar{G}_t}{\partial x^2} \right) dx \quad (13)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \bar{T}(x',p) &= \int_0^\ell \frac{\bar{G}_t(x,x',p)}{a} T_0(x) dx \\ &+ \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{G}_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - \bar{T} \frac{\partial \bar{G}_t}{\partial x} \right) dx \end{aligned} \quad (14)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \bar{T}(x',p) &= \int_0^\ell \frac{\bar{G}_t(x,x',p)}{a} T_0(x) dx \\ &+ \left[\bar{G}_t(\ell,x',p) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \Big|_\ell - \bar{G}_t(0,x',p) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \Big|_0 \right. \\ &\left. - \bar{T} \frac{\partial \bar{G}_t}{\partial x} \Big|_\ell + \bar{T} \frac{\partial \bar{G}_t}{\partial x} \Big|_0 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

soit finalement, en utilisant les conditions aux frontières :

$$\begin{aligned} \bar{T}(x',p) &= \int_0^\ell \frac{\bar{G}_t(x,x',p)}{a} T_0(x) dx + \bar{G}_t(\ell,x',p) \frac{H_{it}}{\lambda} \bar{T}_a(p) \\ &+ \bar{G}_t(0,x',p) \frac{H_{et}}{\lambda} \bar{T}_e(p) \end{aligned} \quad (16)$$

Les températures des surfaces intérieures et extérieures du toit sont données par :

$$\begin{aligned} \bar{T}_t(0,p) &= \int_0^\ell \frac{\bar{G}_t(x,0,p)}{a} T_0(x) dx + h_{it} \bar{T}_a \bar{G}_t(\ell,0,p) \\ &+ h_{et} \bar{T}_e \bar{G}_t(0,0,p) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_t(\ell,p) &= \int_0^\ell \frac{\bar{G}_t(x,\ell,p)}{a} T_0(x) dx + h_{it} \bar{T}_a \bar{G}_t(\ell,\ell,p) \\ &+ h_{et} \bar{T}_e \bar{G}_t(0,\ell,p) \end{aligned} \quad (18)$$

avec : $h_{it} = \frac{H_{it}}{\lambda}$ et $h_{et} = \frac{H_{et}}{\lambda}$

Pour les températures dans les parois latérales, le raisonnement est identique :

$$\bar{T}_\ell(0,p) = \int_0^\ell \frac{\bar{G}_\ell(x,0,p)}{a} T_0(x) dx + h_{i\ell} \bar{T}_a \bar{G}_\ell(\ell,0,p) + h_{e\ell} \bar{T}_e \bar{G}_\ell(0,0,p) \quad (19)$$

$$\bar{T}_\ell(\ell,p) = \int_0^\ell \frac{\bar{G}_\ell(x,\ell,p)}{a} T_0(x) dx + h_{i\ell} \bar{T}_a \bar{G}_\ell(\ell,\ell,p) + h_{e\ell} \bar{T}_e \bar{G}_\ell(0,\ell,p) \quad (20)$$

$$\text{avec : } h_{i\ell} = \frac{H_{i\ell}}{\lambda} \quad \text{et } h_{e\ell} = \frac{H_{e\ell}}{\lambda},$$

La contribution, au cours du temps, des conditions initiales dans les parois tend toujours vers zéro et disparaît de toute façon du bilan global. Nous négligeons dans le calcul l'influence des termes contenant $T_0(x)$. Les équations (17) et (19) sont inutiles pour la résolution du problème. Les équations (18) et (20) donnent les températures superficielles internes des parois en fonction de l'inconnue \bar{T}_a et de la température extérieure \bar{T}_e qui est donnée. Ceci permet de réécrire l'équation (3) sous la forme :

$$\begin{aligned} & [p + (\theta_t + \theta_\ell)] \bar{T}_a \\ &= T_a(0) + \theta_t [h_{it} \bar{G}_t(\ell,\ell,p) \bar{T}_a(p) + h_{et} \bar{G}_t(0,\ell,p) \bar{T}_e(p)] \\ & \quad + \theta_\ell [h_{i\ell} \bar{G}_\ell(\ell,\ell,p) \bar{T}_a(p) + h_{e\ell} \bar{G}_\ell(0,\ell,p) \bar{T}_e(p)] \end{aligned} \quad (21)$$

On pose : $\beta = \theta_t + \theta_\ell$;

$$\begin{aligned} & [p + \beta] \bar{T}_a \\ &= T_a(0) + [\theta_t h_{it} \bar{G}_t(\ell,\ell,p) + \theta_\ell h_{i\ell} \bar{G}_\ell(\ell,\ell,p)] \bar{T}_a(p) \\ & \quad + [\theta_t h_{et} \bar{G}_t(0,\ell,p) + \theta_\ell h_{e\ell} \bar{G}_\ell(0,\ell,p)] \bar{T}_e(p) \end{aligned} \quad (22)$$

Cette équation, où ne figure plus qu'une inconnue, tient compte implicitement, mais rigoureusement, de la propagation de la chaleur dans le mur. Elle nécessite évidemment la connaissance de la fonction de Green. Notons que l'original $G(\ell,\ell,t)$ de la fonction $\bar{G}(\ell,\ell,p)$ diverge au voisinage de $t = 0$. On peut montrer que cette divergence est en $t^{-1/2}$ et sera intégrable. Il en sera tenu compte implicitement par la suite.

3.4. Recherche de la fonction de Green

La fonction de Green, solution du système d'équations (7), peut se mettre sous la forme [8] :

$$G_t(x,x',t) = a \sum_{nt=1}^{\infty} \varphi_{nt}(x) \varphi_{nt}(x') e^{-a\alpha_{nt}^2 t} \quad (23)$$

de transformée de Laplace

$$\bar{G}_t(x,x',p) = a \sum_{nt=1}^{\infty} \frac{\varphi_{nt}(x) \varphi_{nt}(x')}{p + a\alpha_{nt}^2} \quad (24)$$

Les fonctions $\varphi_{nt}(x)$ étant des fonctions propres du Laplacien :

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{nt}(x) &= -\alpha_{nt}^2 \varphi_{nt}(x) \\ \text{avec : } \begin{cases} \left. \frac{d\varphi_{nt}(x)}{dx} \right|_{x=0} &= h_{et} \varphi_{nt}(x) \\ \left. \frac{d\varphi_{nt}(x)}{dx} \right|_{x=\ell} &= -h_{it} \varphi_{nt}(x) \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

Les fonctions $\varphi_{nt}(x)$, normalisées dans l'intervalle $[0,\ell]$ s'écrivent :

$$\varphi_{nt}(x) = B_{nt} \left(\cos \alpha_{nt} x + \frac{h_{et}}{\alpha_{nt}} \sin \alpha_{nt} x \right) \quad (26)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{1}{B_{nt}^2} &= \frac{(\alpha_{nt}^2 + h_{et}^2)}{2\alpha_{nt}^2} \ell + \frac{h_{et}}{2\alpha_{nt}^2} \\ & \quad - \frac{1}{2\alpha_{nt}^2} \left(h_{et} \cos 2\alpha_{nt} \ell + \frac{h_{et}^2 - \alpha_{nt}^2}{2\alpha_{nt}} \sin 2\alpha_{nt} \ell \right) \end{aligned} \quad (27)$$

les valeurs propres α_{nt} sont solutions de l'équation :

$$\text{tg } \alpha_{nt} \ell = \frac{\alpha_{nt} (h_{it} + h_{et})}{\alpha_{nt}^2 - h_{it} h_{et}}$$

et sont déterminées numériquement par la méthode de dichotomie à 10^{-10} près. Le raisonnement est identique pour les parois latérales, il suffit de remplacer dans les expressions précédentes H_{et} et H_{it} par $H_{e\ell}$ et $H_{i\ell}$.

Ceci permet d'écrire l'équation (22) sous la forme :

$$\begin{aligned} \bar{T}_a(p) &= \frac{T_a(0)}{p + \beta} + \frac{1}{p + \beta} \\ & \cdot \left\{ \left[a \theta_t h_{it} \sum_{nt} \frac{\varphi_{nt}^2(\ell)}{p + a\alpha_{nt}^2} + a \theta_\ell h_{i\ell} \sum_{n\ell} \frac{\varphi_{n\ell}^2(\ell)}{p + a\alpha_{n\ell}^2} \right] \bar{T}_a \right. \\ & \quad \left. + \left[a \theta_t h_{et} \sum_{nt} \frac{\varphi_{nt}(0) \varphi_{nt}(\ell)}{p + a\alpha_{nt}^2} + a \theta_\ell h_{e\ell} \sum_{n\ell} \frac{\varphi_{n\ell}(0) \varphi_{n\ell}(\ell)}{p + a\alpha_{n\ell}^2} \right] \right. \\ & \quad \left. \cdot \bar{T}_e \right\} \quad (28) \end{aligned}$$

L'original de l'expression :

$$a \theta_t h_{it} \sum_{nt} \frac{\varphi_{nt}^2(\ell)}{p + a\alpha_{nt}^2} + a \theta_\ell h_{i\ell} \sum_{n\ell} \frac{\varphi_{n\ell}^2(\ell)}{p + a\alpha_{n\ell}^2}$$

diverge en $t = 0$, tandis que l'original de l'expression :

$$a \theta_t h_{et} \sum_{nt} \frac{\varphi_{nt}(0) \varphi_{nt}(\ell)}{p + a\alpha_{nt}^2} + a \theta_\ell h_{e\ell} \sum_{n\ell} \frac{\varphi_{n\ell}(0) \varphi_{n\ell}(\ell)}{p + a\alpha_{n\ell}^2}$$

converge quel que soit t .

Nous écrivons l'expression (28) sous la forme :

$$\bar{T}_a = \frac{T_a(0)}{p + \beta} + \bar{H}(p) \bar{T}_a(p) + \bar{K}(p) \bar{T}_e(p) \quad (29a)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{H}(p) = \frac{a \theta_t h_{it} \sum_{nt} \frac{\varphi_{nt}^2(\ell)}{p + a \alpha_{nt}^2} + a \theta_\ell h_{i\ell} \sum_{n\ell} \frac{\varphi_{n\ell}^2(\ell)}{p + a \alpha_{n\ell}^2}}{p + \beta} \\ \bar{K}(p) = \frac{a \theta_t h_{et} \sum_{nt} \frac{\varphi_{nt}(0) \varphi_{nt}(\ell)}{p + a \alpha_{nt}^2} + a \theta_\ell h_{e\ell} \sum_{n\ell} \frac{\varphi_{n\ell}(0) \varphi_{n\ell}(\ell)}{p + a \alpha_{n\ell}^2}}{p + \beta} \end{array} \right. \quad (29b)$$

L'original de $\bar{H}(p)$ n'a aucune singularité : en effet, c'est le produit de convolution de la fonction $e^{-\beta t}$ par la fonction $G(\ell, \ell, t)$ dont la singularité en $t = 0$ est de type $t^{-1/2}$.

Nous supposons dans ce qui suit que $\beta \neq a \alpha_n^2 \forall n$. Les fonctions $\bar{H}(p)$ et $\bar{K}(p)$ peuvent s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{H}(p) = a \theta_t h_{it} \sum_{nt} \frac{\varphi_{nt}^2(\ell)}{a \alpha_{nt}^2 - \beta} \left(\frac{1}{p + \beta} - \frac{1}{a \alpha_{nt}^2 + p} \right) \\ \quad + a \theta_\ell h_{i\ell} \sum_{n\ell} \frac{\varphi_{n\ell}^2(\ell)}{a \alpha_{n\ell}^2 - \beta} \left(\frac{1}{p + \beta} - \frac{1}{a \alpha_{n\ell}^2 + p} \right) \\ \bar{K}(p) = a \theta_t h_{et} \sum_{nt} \frac{\varphi_{nt}(0) \varphi_{nt}(\ell)}{a \alpha_{nt}^2 - \beta} \left(\frac{1}{p + \beta} - \frac{1}{a \alpha_{nt}^2 + p} \right) \\ \quad + a \theta_\ell h_{e\ell} \sum_{n\ell} \frac{\varphi_{n\ell}(0) \varphi_{n\ell}(\ell)}{a \alpha_{n\ell}^2 - \beta} \left(\frac{1}{p + \beta} - \frac{1}{a \alpha_{n\ell}^2 + p} \right) \end{array} \right. \quad (30)$$

soit :

$$T_a(t) = T_a(0)e^{-\beta t} + \int_0^t H(t - \tau) T_a(\tau) d\tau + \int_0^t K(t - \tau) T_e(\tau) d\tau \quad (31a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H(t) = a \theta_t h_{it} \sum_{nt} \frac{\varphi_{nt}^2(\ell)}{a \alpha_{nt}^2 - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-a \alpha_{nt}^2 t}) \\ \quad + a \theta_\ell h_{i\ell} \sum_{n\ell} \frac{\varphi_{n\ell}^2(\ell)}{a \alpha_{n\ell}^2 - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-a \alpha_{n\ell}^2 t}) \\ K(t) = a \theta_t h_{et} \sum_{nt} \frac{\varphi_{nt}(0) \varphi_{nt}(\ell)}{a \alpha_{nt}^2 - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-a \alpha_{nt}^2 t}) \\ \quad + a \theta_\ell h_{e\ell} \sum_{n\ell} \frac{\varphi_{n\ell}(0) \varphi_{n\ell}(\ell)}{a \alpha_{n\ell}^2 - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-a \alpha_{n\ell}^2 t}) \end{array} \right. \quad (31b)$$

Ces deux séries convergent quel que soit $t \geq 0$ et s'annulent en $t = 0$.

3.5. Modèle de la masse thermique

Le modèle de la masse thermique, qui consiste à admettre une température uniforme dans chaque mur en contact de part et d'autre avec les températures $T_a(t)$ et $T_e(t)$, conduirait à l'équation d'évolution suivante pour $T_a(t)$:

$$T_a(t) = T_a(0) e^{-\beta t} + \int_0^t H_0(t - \tau) T_a(\tau) d\tau + \int_0^t K_0(t - \tau) T_e(\tau) d\tau \quad (32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0(t) = \frac{\theta_\ell a h_{i\ell}}{\ell(F - \beta)} (e^{-\beta t} - e^{-Ft}) \\ \quad + \frac{\theta_t a h_{it}}{\ell(G - \beta)} (e^{-\beta t} - e^{-Gt}) \\ K_0(t) = \frac{\theta_\ell a h_{e\ell}}{\ell(F - \beta)} (e^{-\beta t} - e^{-Ft}) \\ \quad + \frac{\theta_t a h_{et}}{\ell(G - \beta)} (e^{-\beta t} - e^{-Gt}) \end{array} \right. \quad (33)$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} F = \frac{a h_{i\ell}}{\ell} + \frac{a h_{e\ell}}{\ell} \\ G = \frac{a h_{it}}{\ell} + \frac{a h_{et}}{\ell} \end{array} \right. \quad (34)$$

On remarque que les deux modèles conduisent à des formes analytiques similaires.

3.6. Modèle de la résistance thermique pure

Quand le local est pris sans inertie, ses parois sont considérées comme des résistances thermiques. L'équation d'évolution s'écrit alors :

$$\rho_a c_a V_a \frac{dT_{as}(t)}{dt} = Z (T_e(t) - T_{as}(t)),$$

$$\text{ce qui entraîne } T_{as}(t) = 1 - e^{-\chi t} \quad (35)$$

$$\text{avec } Z = \frac{1}{\frac{\ell}{\lambda} + \frac{1}{H_{i\ell}} + \frac{1}{H_{e\ell}}} S_\ell + \frac{1}{\frac{\ell}{\lambda} + \frac{1}{H_{it}} + \frac{1}{H_{et}}} S_t$$

$$\text{et } \chi = \frac{Z}{\rho_a c_a V_a} = 9,8 \text{ h}^{-1}$$

3.7. Cas où la température extérieure est un échelon unité

L'équation (31a) devient, quand on prend : $T_e(t) = E(t)$ (fonction de Heaviside) [10] :

$$T_a(t) = T_a(0) e^{-\beta t} + \int_0^t H(t - \tau) T_a(\tau) d\tau + \int_0^t K(\tau) d\tau \quad (36)$$

3.8. Cas où la température extérieure est sinusoïdale

Soient : $T_e(t) = A \sin \omega t$; $K(t) = \sum_n a_n e^{-\sigma_n t}$

L'équation (31a) devient :

$$T_a(t) = T_a(0) e^{-\beta t} + \int_0^t H(t-\tau) T_a(\tau) d\tau + \sum_n a_n e^{-\sigma_n t} \int_0^t e^{\sigma_n \tau} A \sin \omega \tau d\tau \quad (37)$$

Après calcul, on obtient :

$$T_a(t) = T_a(0) e^{-\beta t} + \int_0^t H(t-\tau) T_a(\tau) d\tau + \sum_n a_n \left\{ A \left(\frac{\omega \cos \omega t + \sigma_n \sin \omega t}{\sigma_n^2 + \omega^2} \right) - \frac{A \omega e^{-\sigma_n t}}{\sigma_n^2 + \omega^2} \right\} \quad (38)$$

Les équations intégrales (36) et (38) sont résolues numériquement. Le temps est discrétisé en intervalles égaux de durée Δ , dans lesquels la fonction inconnue $T_a(t)$ est interpolée linéairement :

$$T_a(t) = T_p + \frac{T_{p+1} - T_p}{\Delta} (t - p \Delta), \quad T \in [p\Delta, (p+1)\Delta] \quad (39)$$

La présence dans les produits de convolution des exponentielles décroissantes permet d'utiliser un algorithme de calcul très rapide et n'occupant que très peu de mémoire. Cependant, la représentation en série des fonctions $H(t)$ et $K(t)$ est un inconvénient, car le nombre de termes nécessaires pour obtenir une bonne précision est élevé. Nous procédons donc de la manière suivante : les fonctions $H(t)$ et $K(t)$ sont tout d'abord calculées avec précision (nombre de termes dépassant 100), puis approchées par des polynômes. Nous avons constaté qu'un polynôme de degré 3 suffisait. Les figures 2 et 3 montrent que l'erreur commise sur les fonctions $K(t)$ et $H(t)$ est très faible. Ceci permet donc d'accélérer considérablement l'algorithme de calcul, tout en conservant une excellente précision.

4. RÉSULTATS ET CONCLUSION

Les dimensions du local et les caractéristiques thermophysiques sont les suivantes :

- toit :

$$S_t = 25 \text{ m}^2 ; \ell = 0,1 \text{ m} ; \lambda = 0,92 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} ;$$

$$H_{it} = 11,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} ; H_{et} = 20 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

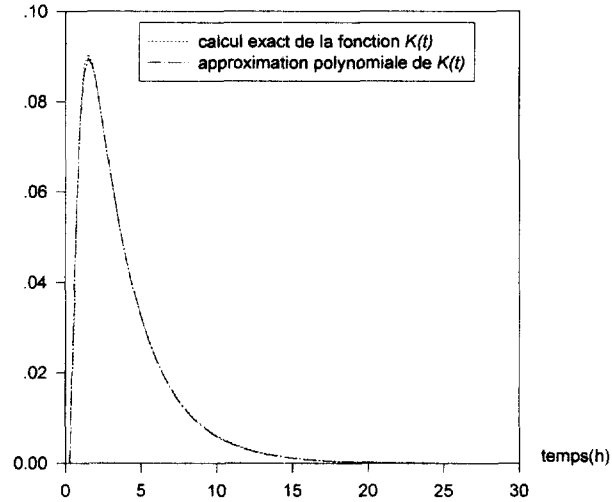


Figure 2. Superposition de la fonction $K(t)$ exacte et son polynôme d'approximation.

Figure 2. Superposition of the exact function $K(t)$ and its polynomial approximation.

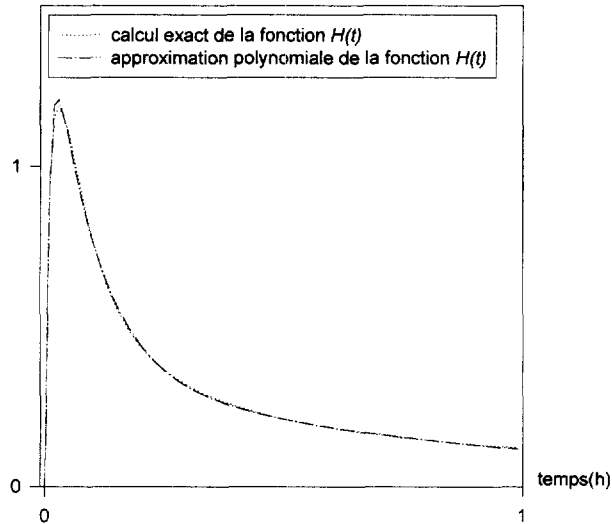


Figure 3. Superposition de la fonction $H(t)$ exacte et son polynôme d'approximation.

Figure 3. Superposition of the exact function $H(t)$ and its polynomial approximation.

- parois latérales :

$$S_\ell = 100 \text{ m}^2 ; \ell = 0,1 \text{ m} ; \lambda = 0,92 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} ;$$

$$H_{it} = 9,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} ; H_{e\ell} = 16,4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$a = 0,4166 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} ; \rho_b c_b = 2,208 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$$

- air du local :

$$V_a = 125 \text{ m}^3 ; \rho_a c_a = 1 224 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$$

Les fonctions $K(t)$ et $H(t)$ sont approchées par des polynômes d'exponentielles décroissantes de t , l'unité de temps étant l'heure.

$$\begin{cases} K(u) = a_1 u^{\sigma_1} + a_2 u^{\sigma_2} - (a_1 + a_2) u^{\sigma_3} \\ H(u) = b_1 u^{\mu_1} + b_2 u^{\mu_2} - (b_1 + b_2) u^{\mu_3} \end{cases} \quad \text{où } u = e^{-t} \quad (40)$$

Le calcul donne les valeurs des coefficients :

$$\begin{aligned} a_1 &= 18,473; & a_2 &= 0,179 \\ b_1 &= 0,352; & b_2 &= 1,27 \\ \sigma_1 &= 2,767; & \sigma_2 &= 0,342; & \sigma_3 &= 2,734 \\ \mu_1 &= 1,108; & \mu_2 &= 10,329; & \mu_3 &= 107,86 \\ \beta &= 27,9 \text{ h}^{-1} \end{aligned}$$

Pour la température extérieure sinusoïdale, nous prenons une amplitude $A = -5 \text{ }^\circ\text{C}$ pour une température moyenne de $0 \text{ }^\circ\text{C}$ et une période de 24 h.

Les figures 4 et 5 montrent l'évolution comparée de la température $T_a(t)$ pour les trois modèles, dans le cas de température extérieure échelon unité et sinusoïdale. Comme on pouvait s'y attendre, le modèle assimilant les murs, ici de faible épaisseur et non isolés, à une résistance thermique pure n'est pas crédible. Tout se passe comme si la pièce était en contact direct avec l'atmosphère extérieure, la constante de temps étant très faible ($\sim 0,11 \text{ h}$).

Le modèle, pratiquement rigoureux, utilisant les fonctions de Green et celui, simplifié, tenant compte de la masse thermique des murs, fournissent des résultats proches. On remarque toutefois que le modèle des fonctions de Green conduit en régime alternatif à un

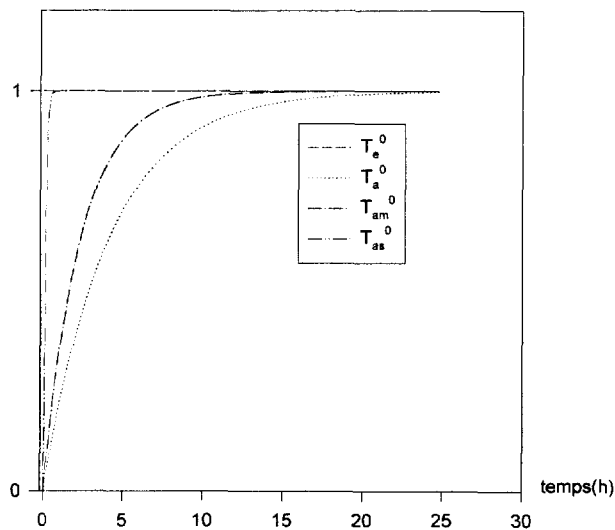


Figure 4. Superposition des réponses, obtenues par les différents modèles, à une sollicitation de température extérieure (échelon unité).

Figure 4. Superposition of the responses to an outside unit temperature, for the different models.

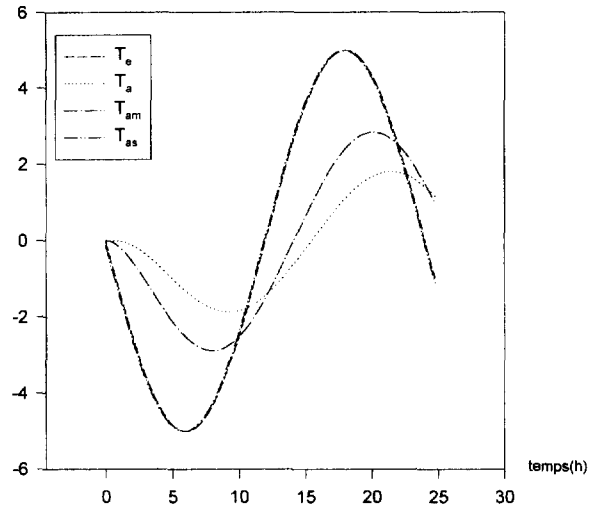


Figure 5. Superposition des réponses, obtenues par les différents modèles, à une sollicitation de température extérieure sinusoïdale.

Figure 5. Superposition of the responses to an outside harmonic temperature, for the different models.

déphasage supplémentaire de près de 90 min et à une atténuation d'amplitude supplémentaire de près de $2 \text{ }^\circ\text{C}$ par rapport au modèle de la masse thermique, ce qui constitue une correction non négligeable.

On constate, en fait, que le modèle de la masse thermique consiste à approcher, assez arbitrairement, par une somme de trois exponentielles, les fonctions $K(t)$ et $H(t)$ que nous avons définies rigoureusement. Notre méthode apporte donc une technique de correction mathématique justifiée. Enfin, signalons que l'on peut rejoindre la méthode de l'analyse modale. Celle-ci revient à approcher la réponse à l'échelon unité (figure 4) par un polynôme du type :

$$T_a(t) \sim 1 - \sum_{n=1}^N a_n e^{-\lambda_n t} \quad (\text{avec } \sum_n a_n = 1)$$

puis à utiliser le principe de Duhamel pour reconstituer la réponse du bâtiment à n'importe quelle sollicitation de température extérieure.

Notre méthode fournit donc le moyen de définir numériquement et avec la précision voulue les valeurs propres et modes propres du bâtiment pour ce type de sollicitation, les autres types de sollicitation (absorption de rayonnement par les parois, chauffage...) étant susceptibles d'un traitement presque identique.

RÉFÉRENCES

[1] Lefebvre G., Caractérisation de l'inertie thermique d'un bâtiment par analyse modale, Rev. Gén. Therm. 332-333 (1989) 500-510.

[2] Oiry H., Bardon J.-P., Comportement thermique de différents types d'habitation soumis à un ensoleillement et à une température extérieure périodique, *Int. J. Heat Mass Tran.* 28 (11) (1985) 1990–2004.

[3] Lefebvre G., Bransier J., A. Neveu, Simulation du comportement thermique d'un local par des méthodes numériques d'ordre réduit, *Rev. Gén. Therm.* 302 (1987) 106–114.

[4] Duhamel P. et Gosse J., Analyse thermique d'un mur composite soumis sur une face à une variation en créneaux de la température, *Int. J. Heat Mass Tran.* 23 (1980).

[5] Bacot P., Neveu A. et Sicard J., Analyse modale des phénomènes thermiques en régime variable dans le bâtiment, *Rev. Gén. Therm.* 267 (1984) 189–201.

[6] Bacot P., Analyse modale des systèmes thermiques, Thèse, université Paris-6, 1984.

[7] Sicard J., Analyse modale appliquée à la thermique, Thèse, université de Paris-6, 1984.

[8] Carslaw H.S., Jaeger J.P., *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, 1959.

[9] Özisik M.N., *Heat Conduction*, J. Wiley Interscience, New York, 1980.

[10] Hladik, La transformation de Laplace à plusieurs variables, Masson, 1969.

Abridged English Version

Simulation of the thermal behavior of a room by the Green's function method

Massive walls are discretised in layers of given thickness, constituting a thermal mass system. One finally obtains a linear system of classical differential equations, first-order in time, in which the numerous variables are temperatures at different nodes of the system (knowledge model). The numerical resolution of this system of equations is classical and requires the diagonalisation of a matrix, thus revealing proper modes of the building that characterize its inertia. Then, these modes depend on the chosen discretisation. The dimension of the obtained linear system being generally very large, various methods of reduction, based on numerous criteria, are used to reduce the volume and the time of calculus.

The Green's function method allows, on the one hand, to get rid of the necessity of discretising walls, and, on the other hand, to obtain directly and rigorously the evolution equation of the temperature of a room. Such an equation has never been stated, to our knowledge, in works on this topic.

This equation is an integral version of the equation of Volterra, involving only convolution products of external solicitations with only time-dependent functions, characteristics of the structure of the building and of the concerned solicitation. Therefore any intermediate variable disappears.

The objective of this article is to calculate these functions in the simplified case of a single cubic-formed room, the walls of which, of constant thickness and with identical thermophysical characteristics, are supposed thermally independent. The only solicitation envisaged here is the external temperature. In the case of this simplified structure, we establish the evolution equation of the internal temperature of the cell, after

having defined the Green's function of the envelope, then we give the exact analytic form of previously evoked characteristic functions and show how to eliminate singularities that appear and can be evidenced in more classical processes.

These functions appear in the form of decreasing exponential series, showing an infinite sequence of time constants, allowing to establish a connection with the modal analysis.

We show that each of them can be approached with a great precision, in the interval $[0, \infty[$, by a finite series of three decreasing exponentials. This method of approximation, that resembles the selection of modes in the classical analysis model, differs greatly because the chosen constants of time are not systematically those in the infinite series, and differ depending on the considered function. Since there is only a very reduced number of exponential power series expansions in convolution products, it is then possible to rapidly and easily solve numerically Volterra's equation without any memory consumption.

Finally, we compare the simulation results obtained for the evolution of the internal temperature of the room with different analytical expressions of the external temperature (obtained using the new mathematical analysis) with those obtained using first a simple thermal mass model, then a pure thermal resistance model.

Results for the internal temperature amplitude and its phase-lags relatively to the external temperature are very different, particularly concerning the harmonic regime.